

TSUBAME 共同利用 令和6年度 学術利用 成果報告書

利用課題名 超流動ヘリウムにおける量子乱流の数値的研究  
英文: Numerical study of quantum turbulence in superfluid helium

利用課題責任者 湯井 悟志  
Satoshi Yui

大阪公立大学大学院理学研究科  
Graduate School of Science, Osaka Metropolitan University  
<https://www.omu.ac.jp/sci/>

本課題では、2 流体モデルの連立数値計算により超流動ヘリウムにおける量子乱流の物理を研究してきた。量子乱流には 2 つの形態があり、1 つは準古典乱流、もう 1 つは Vinen 乱流とよばれる。準古典乱流は統計的性質に古典乱流とのアナロジーをもち、その実現には渦糸の局所的なバンドル構造が重要だと信じられている。我々は超流体成分の渦糸モデルと常流体の Navier–Stokes 方程式の連立数値計算を実行し、渦糸バンドル形成を調べた。結果として、乱流常流体の渦から受ける影響により、局所的な渦糸バンドルが出現し得ることがわかった。得られた量子乱流の統計的性質を解析し、準古典乱流との対応を調べた。

In this project, the physics of quantum turbulence in superfluid helium has been studied by numerical simulations of the coupled two-fluid model. There are two forms of quantum turbulence: quasi-classical turbulence and Vinen turbulence. Quasi-classical turbulence has statistical properties analogous to those of classical turbulence. It is believed that the local bundle structure of vortex filaments is important for the realization of quasi-classical turbulence. To investigate the vortex bundle formation, we have performed a coupled numerical simulation of the superfluid of the vortex filament model and the Navier–Stokes equations for the normal fluid. It is found that the local vortex bundles can appear due to the vortices in the turbulent normal fluid. The statistical properties of the quantum turbulence are analyzed and the correspondence with quasi-classical turbulence is investigated.

*Keywords:* 量子流体力学, 超流動, 量子渦, 量子乱流, 2 流体モデル, 渦糸モデル, 高速多重極法

## 背景と目的

量子乱流とは超流動の乱流のことであり、量子流体力学における重要問題のひとつである[1]。超流動は、極低温において Bose–Einstein 凝縮などにより流体の粘性が消失する現象である。典型的には、液体ヘリウム 4 が大気圧下 2.17 K で超流動転移を起こす。超流動には循環の量子化という際立った特徴があり、そのような渦は量子渦と呼ばれる。例えば、超流動ヘリウム 4 の量子渦は直径 0.1 nm 程度の渦芯を持ち、その渦芯周りの速度循環は離散的な値のみが許される。このような量子渦が複雑に絡み合ったタングルを形成することで、量子乱流状態が実現される。量子乱流の研究は半世紀以上に液体ヘリウム 4 において始まり、いまでは様々な量子凝縮系にまで広がっている。

Tisza と Landau の 2 流体モデルによると、超流動ヘリウムは超流体成分と常流体成分の混合流体として理解される。ここで、超流体成分は量子凝縮成分に由来

しており、粘性をもたない。一方、常流体成分は熱的励起成分により構成される粘性流体である。これら二流体間には、量子渦を介して相互摩擦力が働く。そのため、量子乱流状態においては二流体が互いに影響を与えながら運動を行なう。そのような二流体結合ダイナミクスは量子乱流を理解する上で重要であることが、可視化実験により明らかになりつつある。近年の可視化実験の発展により、二流体のそれぞれの運動を独立に観測できるようになった[2]。それらの実験では、二流体結合ダイナミクス特有の現象が観測された(例えば、常流体層流の平坦化など[3])。そのような現象は、量子乱流の渦糸モデルのみを計算するだけでは十分には理解できなかった[4]。

2 流体連立ダイナミクスは量子流体力学において重要であるが、その理解はまだ十分ではない。2 流体連立ダイナミクスの数値計算(渦糸モデルと Navier–Stokes 方程式の連立)の先駆的研究として、2000 年に

Kivotides らが渦輪のダイナミクスの研究を行なった[5]. 近年, いくつかのグループが 2 流体連立ダイナミクスの研究を推進しており, 常流体(ほとんど層流)と量子乱流の連立ダイナミクス[6,7], 新しい結合モデルの提案[8], 渦輪ダイナミクスの数値計算と実験との比較[9], 等が研究された. また, 最近では 2 流体間の相互摩擦のモデルについての比較研究も行われた[10].

まだ十分に理解されていない問題として我々が注目したのは, 2 流体が同時に乱流状態のときの物理である. 量子乱流にはその統計的性質に着目して準古典乱流(quasi-classical turbulence)および Vinen 乱流という 2 つの形態がある[11]. 準古典乱流は古典乱流とのアナロジーをもち, その実現には量子乱流中の渦糸が局所的に向きをそろえたバンドル構造を形成することが重要だと考えられている. そのようなバンドル構造は, 2 流体同時乱流状態においては常流体成分の渦の影響により形成され得るので, 準古典乱流の理解には 2 流体の連立ダイナミクスを研究することが重要である(ただし, これは有限温度の場合のバンドル形成のシナリオである.). しかしながら, 2 流体の同時乱流状態の連立数値計算は, 計算コストの増大等の困難がある.

本課題の主なねらいは, 量子乱流と常流体乱流の連立数値計算により, 2 流体同時乱流状態の物理を探索することである. 2 流体連立数値計算では, 超流体成分の渦糸モデルと常流体成分の Navier-Stokes 方程式を連立する. 常流体成分に外力を印加して乱流状態にすると, その常流体乱流からの相互摩擦を受けて超流体成分も量子乱流になる. そのようにして得られた 2 流体同時乱流の物理を調べる. 2 流体同時乱流の計算における困難であった計算コスト増大には, 高速多重極法[12,13]を渦糸の計算に適用し, さらに TSUBAME の性能を活用することで乗り越える.

この課題は昨年度からの継続である. 昨年度は, 2 流体同時乱流の統計的定常状態および減衰の数値計算に成功した. 今年度は, 追加の計算を行ない, 2 流体同時乱流状態の性質を系統的に調べた. また, 別の研究であるが, 以前から継続していた常流体乱流による量子乱流の強化に関する研究の追加計算を行い, その成果を論文として発表した[14].

## 概要

超流動とは非粘性の流れのことであり, 量子凝縮系の物理学における重要な研究対象である. 超流動の乱流は量子乱流ともよばれ, いまでも盛んに研究されている. 量子乱流の長年の未解決問題として T1-T2 遷移などがあるが, そのような状況のシミュレーションには大規模な数値計算が必要だと考えられている. 本研究課題では, TSUBAME の性能を活用してそのような大規模数値計算を行い, 量子乱流の重要な物理の解明することを目指す. この課題は昨年度からの継続である. 昨年度は 2 流体同時乱流の数値計算を行うことに成功し, 準古典乱流の性質だと考えられている渦糸バンドルの形成などを見出した. 今年度は, さらに数値計算を行い, 系統的に解析を行なった. また, 以前から継続していた常流体乱流による量子乱流の強化に関する研究の追加計算を行い, その成果を論文として発表した[14].

## 結果および考察

2 流体の連立数値計算では, 超流体成分を渦糸モデルで, 常流体成分を Navier-Stokes 型の方程式で扱う[10]. 渦糸モデルでは, 量子渦は循環の量子  $\kappa$  をもつ渦糸で近似される[4]. 渦糸の周りに誘導される超流動速度場  $\mathbf{v}_s$  は Biot-Savart の法則で計算される. 有限温度では, 常流体成分との相互摩擦も考慮される必要があり, 渦糸の速度  $d\mathbf{s}/dt$  は次の式に従う:

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \mathbf{v}_s(\mathbf{s}) + \alpha \mathbf{s}' \times (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) - \alpha' \mathbf{s}' \times (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s).$$

ここで, 右辺の第 2 項と第 3 項は相互摩擦を表しており,  $\alpha, \alpha'$  は温度に依存するパラメータ,  $\mathbf{v}_n$  は常流動速度場である. 一方, 常流体成分は Navier-Stokes 型の方程式に従う. この研究では, 常流体を乱流にするために文献[15]の 2 次元 Taylor-Green 型の外力を印加する. この外力により, 4 つの大きな渦管が駆動され, 常流体成分は乱流状態になる.

今回計算した状況は熱対向流と Co-flow の 2 種類である. また, 量子乱流が統計的定常状態に到達した後, 外力振幅を突然ゼロにして, 量子乱流の減衰も解析した. 数値計算のパラメータは以下の通りである. 温度依存のパラメータは 1.9 K に対応する数値を使っ

た. 数値計算領域の体積は,  $(1.0 \text{ mm})^3$  である. 時間分解能は  $0.00005 \text{ s}$  であり, 渦糸の空間分解能は  $0.006\text{-}0.018 \text{ mm}$  である. 常流体成分は  $64^3$  の格子点で離散化し, 渦糸の計算は高速多重極法[11,12]により高速化を行なった. 初期状態は, 常流体が層流, 超流体は 8 個の渦輪を配置した状態である.

昨年度の共同利用において, 我々は 2 流体の連立数値計算により量子乱流と常流体乱流の結合ダイナミクスを再現することに成功した. しかし, 昨年度は長時間のデータは得られておらず, 系統的に量子乱流の性質を調べることはできていなかった. 今年度は追加の計算を実行し, 平均流速依存性や外力振幅依存性を解析した.

まず, Co-flow 中の量子乱流の計算結果について述べる. Co-flow とは, 2 流体の間の平均相対速度がゼロの状況である. 数値計算で時間発展を行うと, 常流体は外力を受けて乱流になり, 乱流常流体から相互摩擦を受けて渦糸がタングルを形成して量子乱流へと成長していくことがわかった. 渦糸長密度を解析すると, 初期状態から増加していき, 統計的定常状態に到達して一定値のまわりを揺らぐようになった. このようにして, 常流体乱流と量子乱流の共存した統計的定常状態が得られた.

そうして得られた 2 流体同時乱流状態であるが, これが上述の準古典乱流の性質を示すかどうかを解析した. 準古典乱流の重要な特徴が, 渦糸のバンドル構造であった. 渦糸の配置を可視化した結果, 確かにバンドルを形成していることがわかった. 図 1 は, Co-flow 中の量子乱流と常流体乱流のスナップショットである. 青線が渦糸, 赤い面が常流体の渦管(速度勾配テンソルの第二不変量の等値面)を示している. 図 1 に示されるように, 渦糸はバンドル構造を形成しており, この構造は準古典乱流に期待される特徴である. さらに, バンドル構造を定量的に評価するために, 我々は平滑化渦度(smoothed vorticity)を解析した[16]. 平滑化渦度は, 渦糸が局所的そろっている場所では大きな値をもつはずである. 我々の結果を解析してみると, 確かにバンドルを形成している位置において平滑化渦度が上昇しており, 平滑化渦度がバンドル形成の定量評価に使えることがわかった. また, 準古典乱流のエネルギー・スペ

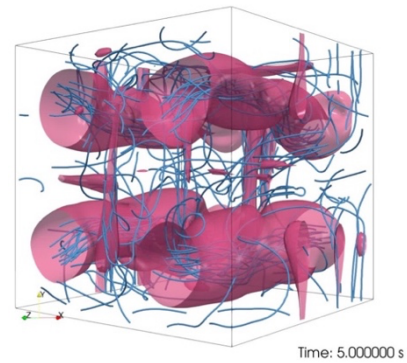


図 1: Co-flow 量子乱流における超流体成分の渦糸(青線)と常流体成分の渦管(赤色の等値面).

クトルはコルモゴロフの $-5/3$ 乗則に従うことが期待されるが, 今回得られた量子乱流を解析したところ, 狭い範囲であるがコルモゴロフ則に近いべきが得られた.

次に, 我々は熱対向流(すなわち 2 流体の間に平均相対速度ある状況)の計算も行なった. 印加される熱対向流によって 2 流体の結合が阻害されて渦糸バンドルが形成されず, 量子乱流が準古典乱流から Vinen 乱流になることが期待される. 数値計算の結果, 確かに熱対向流においては渦糸のバンドル形成されないことがわかった. Co-flow では準古典乱流, 熱対向流においては Vinen 乱流の性質を示すことがわかったが, 平均対向流速 $V_{ns}$ の上昇につれてどのように量子乱流の構造が変化していくのかが疑問である. そこで, 様々な $V_{ns}$ において統計的定常状態における量子乱流の渦糸長密度 $L$ を解析した. その結果,  $V_{ns}$ をゼロから上昇させていくと $L$ が一度減少し, その後 $L$ が増加に転じる傾向を示した. 最初の $L$ の減少は熱対向流による 2 流体の結合阻害によって密な渦糸バンドルが形成されないため, その後の $L$ の増加は印加熱対向流から量子乱流に注入されるエネルギーが増加していくためであると考えられる.

最後に準古典乱流と Vinen 乱流の重要な違いとして, 減衰のべき則を調べた. 統計的定常状態に到達した後エネルギー注入(平均熱対向流速と外力振幅)をゼロにすると, 相互摩擦および常流体粘性のために渦糸長密度は時間とともに減少していく. この減衰に対するべき則として, 準古典乱流は $t^{-3/2}$ , Vinen 乱流は $t^{-1}$ と実験的に知られている. そこで, 我々の数値計算で得られた量子乱流を減衰させることで, どちらのべき則に

従うかを調べた。上述のように、Co-flow 中で駆動された量子乱流は、渦糸がバンドル構造を形成する傾向があった(図 1)。減衰の数値計算の結果、Co-flow で駆動した量子乱流は準古典乱流に期待される  $t^{-3/2}$  にしたがって減衰していく傾向が見られた。したがって、今回得られた局所的バンドル構造をもつ量子乱流は、準古典乱流に分類されると言えるだろう。残る疑問として、この減衰のべき則に 2 流体連立ダイナミクスが重要かどうかというものがある。我々は、Co-flow からの減衰数値実験において、常流体速度場を減衰初期に瞬時にゼロに固定する 1 方向結合の渦糸計算も同様に実施した。この場合、減衰のべき則は準古典乱流のものからは外れ、Vinen 乱流に期待される  $t^{-1}$  に近くなることがわかった。このことは、有限温度の準古典乱流のべき則には 2 流体の乱流が共に減衰していくことが重要であることを示唆している。

また、別の研究であるが、常流体乱流による量子乱流の強化についての研究も行ってきた。この研究は以前からの継続であるが、今年度に TSUBAME を利用して追加計算を行い、その研究成果を論文[14]として発表した。方法は上述と同様であり、渦糸モデルと常流体 Navier–Stokes 方程式の連立である。量子乱流の研究においては、渦糸長密度  $L$  の熱対向流速  $V_{ns}$  に対する応答係数  $\gamma$  が重要な統計量として調べられる： $L = \gamma V_{ns}$ 。この応答係数は温度に依存するが、さらに常流体成分が層流か乱流かにも依存すると考えられている。すなわち、常流体成分が乱流に遷移すれば、その乱流ゆらぎから受ける影響により渦糸長密度が上昇し、応答係数  $\gamma$  が上昇するだろうというシナリオである。そこで、我々は 2 流体連立数値計算により、常流体が乱流状態になったときの応答係数  $\gamma$  のふるまいを研究した。数値計算の結果、確かに常流体乱流の速度ゆらぎとともに  $\gamma$  が上昇し、常流体速度ゆらぎが実験値と近い時に  $\gamma$  も実験値に近くなることが明らかになった。詳細は文献[14]を参照されたい。

#### まとめ、今後の課題

我々は、2 流体モデルの連立数値計算により量子乱流と常流体乱流の結合ダイナミクスを研究した。その主な目的は、準古典乱流の再現と解明であった。数値計

算の状況は Co-flow と熱対向流である。Co-flow の場合、常流体乱流の渦管に対応して、量子乱流中の渦糸がバンドルを形成することがわかった。また、エネルギー・スペクトルを解析して、準古典乱流の性質と整合していることを示した。一方、熱対向流の場合、渦糸のバンドル形成は阻害される傾向にあり、準古典乱流とは言えない性質を示した。平均対向流速をゼロから徐々に増加させていったときの渦糸長密度の変化も解析した。さらに、量子乱流の減衰についても研究し、準古典乱流のべき則  $t^{-3/2}$  に一致するかどうかを探索した。今後は、これらのデータをまとめて論文として公表する。また、別の研究であるが、常流体乱流による量子乱流の強化に関する研究も行ない、論文として発表した[14]。

#### 参考文献

- [1] 坪田誠, 笠松健一, 小林未知数, 竹内宏光「量子流体力学」(丸善出版, 2018 年).
- [2] W. Guo et al., PNAS **111**, 4653 (2014).
- [3] A. Marakov et al., Phys. Rev. B **91**, 094503 (2015).
- [4] M. Tsubota et al., J. Low Temp. Phys. **188**, 119 (2017).
- [5] D. Kivotides et al., Science **290**, 777 (2000).
- [6] S. Yui et al., Phys. Rev. Lett. **120**, 155301 (2018).
- [7] S. Yui et al., Phys. Rev. Lett. **124**, 155301 (2020).
- [8] L. Galantucci et al., Eur. Phys. J. Plus **135**, 547 (2020).
- [9] Y. Tang et al., Nat. Commun. **14**, 2941 (2023).
- [10] H. Kobayashi et al., Phys. Rev. Fluids **9**, 104605 (2024).
- [11] P. M. Walmsley and A. I. Gorov, Phys. Rev. Lett. **100**, 245301 (2008).
- [12] R. Yokota et al., J. Comput. Phys. **226**, 1589 (2007).
- [13] R. Yokota et al., Comput. Phys. Commun. **180**, 2066 (2009).
- [14] S. Yui et al., J. Phys. Soc. Jpn. **94**, 043601 (2025).
- [15] S. Goto et al., Phys. Rev. Fluids **2**, 064603 (2017).
- [16] A. W. Baggaley et al., Phys. Rev. Lett. **109**, 205304 (2012).